Université de Provence, Aix-Marseille I
Centre de Mathématiques et Informatique

Mémoire de Master 2

Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Ihab HAIDAR

Directrice de stage : Assia BENABDALLAH

Co-Directrice de stage : Marie HENRY

Approximation par viscosité d'un modèle de croissance tumorale structuré par taille

Marseille, le 16 Juillet 2008

Table des matières

1 Introduction

Depuis quelques années, de nombreux travaux mathématiques sont consacrés à la modélisation en cancérologie. Au delà d'une meilleure compréhension de la biologie du cancer, l'objectif principal est de contribuer à la lutte contre cette maladie. C'est dans ce cadre que ce travail s'inscrit. Il s'agit plus particulièrement de mieux comprendre l'évolution de sites métastatiques générés par une tumeur *primaire*. Une modélisation a été proposée dans [7] et étudiée dans [6] (du point de vue théorique et numérique). Le modèle proposé correspond à une équation de renouvellement cellulaire structurée par taille. C'est le modèle le plus simple décrivant une population cellulaire. On considère une densité de population $n(t, x)$ d'âge $x \in]0, +\infty[$ au temps $t \in]0, +\infty[$ que l'on suppose seulement capables de naître, de vieillir et de mourir. En notant B le taux de naissances et μ le taux de décés, on arrive au modèle de renouvellement cellulaire proposé par **McKendrick-VonFoerster**

$$\begin{cases} \partial_t n(x,t) + \partial_x n(x,t) = -\mu(x) n(x,t) & \forall a > 0, t > 0, \\ n(0,t) = \displaystyle\int_0^\infty B(y) n(y,t) dy & \forall t > 0, \\ n(x,0) = n_0(x) & \forall x > 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Si maintenant, on considère une population de cellules structurées par taille et qui croît à la vitesse

$$g(x) = ax \ln \frac{b}{x},$$

où a, b sont des paramètres réels, le modèle sera

$$\begin{cases} \partial_t n(x,t) + \partial_x (g(x) n(x,t)) = -\mu(x) n(x,t) & \forall x \in]1, b[, t > 0, \\ g(1) n(1,t) = \displaystyle\int_0^\infty B(y) n(y,t) dy & \forall t > 0, \\ n(x,0) = n_0(x) & \forall x \in]1, b[. \end{cases} \tag{1.2}$$

Dans le cours de Master 2,"*une introduction à l'étude mathématique du renouvellement cellulaire*", avec A. Benabdallah, on a considéré ce dernier modèle posé dans le domaine borné $(1, b)$. Par une approche semigroupe, on a montré l'existence et l'unicité d'une solution faible. Ceci nous a permis de montrer le comportement asymptotique en temps de cette solution en fonction des paramètres B, μ. Le problème (1.2) a été étudié dans [3]. Pour mieux comprendre les effets de diffusion dus à l'approximation numérique de ce modèle, on a considéré le système suivant

$$\begin{cases} \partial_t n(x,t) + \partial_x (g(x)(n(x,t) - \varepsilon \partial_x n(x,t))) = -\mu(x) n(x,t) & \forall x \in]1, b[, t > 0, \\ g(1)(n(1,t) - \varepsilon \partial_x n(1,t) = \displaystyle\int_0^\infty B(y) n(y,t) dy & \forall t > 0, \\ n(x,0) = n_0(x) & \forall x \in]1, b[, \end{cases} \tag{1.3}$$

où ε est le paramètre de viscosité. Mon sujet de stage était de faire l'analyse mathématique de ce dernier modèle et en particulier de démontrer qu'il possède une unique solution faible, d'étudier son comportement asymptotique en temps et la convergence lorsque ε tend vers 0. Les résultats que j'ai obtenus, concernent le cas où le taux de mortalité est nul et $g \equiv 1$. Le cas général reste ouvert. La difficulté principale est la résolution du problème spectral associé. On ne peut plus mener les calculs explicites. Le théorème des fonctions implictes, devrait permettre de traiter le cas où ε est petit, et il faudra sans doute utiliser des éléments de la théorie spectrale pour le cas général. C'est un travail à poursuivre.

2 Résultats principaux

2.1 Formulation du problème

Soit B une fonction qui satisfait l'hypothèse suivante :

$$B \geq 0, B \in L^1 \cap L^\infty(]1,\infty[) \text{ et } \int_1^\infty B(y)dy > 1. \tag{2.4}$$

Considérons le système suivant

$$(P^\varepsilon)\begin{cases} n_t = \varepsilon n_{xx} - n_x & \forall (x,t) \in]1,\infty[\times]0,T[\quad (2.5) \\ n(1,t) - \varepsilon n_x(1,t) = \displaystyle\int_1^\infty B(y)n(y,t)dy & \forall t \in]0,T[\quad (2.6) \\ n(x,0) = n_0(x) & \forall x \in]1,\infty[\quad (2.7) \end{cases}$$

On définit l'opérateur A^ε de domaine $D(A^\varepsilon)$ par

$$A^\varepsilon(n) := \varepsilon n_{xx} - n_x,$$

$$D(A^\varepsilon) := \{V \in W^{1,1}(]1,\infty[), A^\varepsilon V \in L^1(]1,\infty[) \text{ et } V(1) - \varepsilon V^{'}(1) = \int_1^\infty BV dy\}.$$

i.e

$$D(A^\varepsilon) := \{V \in W^{2,1}(]1,\infty[) \text{ et } V(1) - \varepsilon V^{'}(1) = \int_1^\infty BV dy\}.$$

2.2 Quelques définition et propriétés des semi-groupes

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach.

2.2.1 Définition d'un semigroupe

Définition 2.1 *Une application $S : [0,+\infty[\to \mathcal{L}(X)$ (resp $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$) est appelée semi-groupe fortement continu, C_0-semi-groupe (resp. groupe) dans X si elle satisfait les propriétés suivantes :*

(i) $S(0) = I_d$,

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s), \forall t,s \geq 0$ *(resp.* $\forall t,s \in \mathbb{R}$*).*

(iii) *Pour tout $x \in X$, l'application $S(.)x$ est continue sur $[0,+\infty[$ (resp. $\mathbb{R}$).*

Dans la suite, nous les appellerons plus simplement C_0-semi-groupes.

Définition 2.2 *Un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t>0}$ sur X est dit de contraction si*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Définition 2.3 *Le générateur infinitésimal A d'un C_0-semi-groupe S dans X est défini par*

$$\begin{aligned} D(A) &= \{x \in X, \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}[S(h)x - x] \text{ existe}\} \\ Ax &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}[S(h)x - x]. \end{aligned}$$

Théorème 2.4 *Soit $(S(t))_{t>0}$ un C_0 semi-groupe sur X de générateur infinitésimal A. Alors :*

(i) *$D(A)$ est dense dans X.*

(ii) *A est fermé.*

(iii) *$\forall x \in D(A), S(.)x \in C^1(]0,\infty[; X) \cap C(]0,\infty[; D(A))$ et on a*

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax, \forall t \geq 0. \tag{2.8}$$

Définition 2.5 *Un opérateur $(A, D(A))$ sur un espace de Banach X est dit dissipatif si*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\|,$$

$\forall \lambda > 0$ et $\forall x \in D(A)$.

On dispose d'un critère plus pratique pour vérifier la dissipativité d'un opérateur. Pour tout $x \in X$, on définit l'ensemble dual de x par

$$J(x) = \{x' \in X'; \langle x, x'\rangle_{X,X'} = \|x\|^2 = \|x'\|^2\}.$$

*On peut montrer en utilisant un corollaire du théorème de **Hahn-Banach** que pour tout $x \in X, J(x) \neq \emptyset$.*

Proposition 2.6 *([2], Théorème 4.2, page 14) $(A, D(A))$ est dissipatif si et ssi pour tout $x \in D(A)$ il existe $j(x) \in J(x)$ tel que*

$$Re\,\langle Ax, j(x)\rangle_{X,X'} \leq 0.$$

Pour conclure que $(A, D(A))$ engendre un semi-groupe sur $L^1(]1, b[)$, il suffit d'appliquer un corollaire du théorème de Lumer-Phillips (voir [2], Théorème 4.3, page 14).

Théorème 2.7 *Soit A un opérateur linéaire non-borné à domaine dense $D(A)$ dans un Banach $(X, \|\|)$. Si A est dissipatif et s'il existe un $\lambda_0 > 0$ tel que $R(\lambda_0 I - A) = X$ alors (A,D(A))engendre un C_0 semi-groupe de contractions sur X.*

En particulier,

$$\left.\begin{array}{c} \overline{D(A)} = X \\ \forall\lambda > 0,\ R(\lambda I - A) = X \\ \exists\omega \in \mathbb{R}\,;\ (A - \omega I) \text{ est dissipatif} \end{array}\right\} \Rightarrow (A, D(A)) \text{ engendre un semi-groupe sur } X.$$

On a utilisé que $(A - \omega I, D(A))$ engendre un semi-groupe sur X si et ssi $(A, D(A))$ engendre un semi-groupe sur X.

De plus, à partir de (2.8) on peut montrer que

$$e^{t(A-\omega I)} = e^{-wt}e^{tA}, \tag{2.9}$$

et donc

$$\left\|e^{tA}\right\|_{L(X)} \leq e^{\omega t}\left\|e^{t(A-\omega I)}\right\|_{L(X)} \leq e^{\omega t}.$$

2.2.2 Existence et unicité de solutions faibles

Définition 2.8 *Soit $f \in L^1(]0,T[,X)$. Une fonction $y \in C(]0,+\infty[,X)$ est appelée solution faible de*

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t), & t \in]0,T[, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2.10}$$

si $\int_0^t y(s)ds \in D(A)$ et

$$y(t) = A\int_0^t y(s)ds + y_0 + \int_0^t f(s)ds.$$

Théorème 2.9 *Si $(A, D(A))$ est générateur d'un C_0 semi-groupe, e^{tA}, alors pour tout $f \in L^1(]0,T[;X)$ et tout $y_0 \in X$, (2.10) admet une unique solution faible donnée par*

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds.$$

Définition 2.10 *On appelle solution classique de (2.10) toute fonction $y \in C([0,T],D(A)) \cap C^1([0,T],X)$ et vérifiant (2.10) dans X.*

Théorème 2.11 *Si $(A, D(A))$ est générateur d'un C_0 semi-groupe, e^{tA}, alors pour tout $f \in C^1([0,T];H)$ et tout $y_0 \in D(A)$, le problème (2.10) admet une unique solution classique.*

2.3 Résultats principaux

On donne si dessous les résultats principaux de ce mémoire.

Théorème 2.12 *Pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé, $(A^\varepsilon, D(A^\varepsilon))$ est générateur d'un C_0 semi-groupe sur $X = L^1(]1,+\infty[)$ que l'on note e^{tA^ε}. Pour chaque ε fixé et pour toute donnée initiale $n_0 \in L^1(]1,+\infty[)$, il existe une unique faible solution n^ε de (P^ε), $n^\varepsilon \in C([0,+\infty[, L^1(]1,+\infty[))$. Elle donnée par*

$$n^\varepsilon(t) = e^{tA^\varepsilon}n_0.$$

De plus, on a

Théorème 2.13 *Sous l'hypothèse (2.4), l'opérateur $(A^\varepsilon, D(A^\varepsilon))$ a une unique valeur propre* ***réelle*** *λ_0^ε. Cette valeur propre est dans $]0,+\infty[$. De plus, il existe $\delta^\varepsilon > 0$ tel que $\sigma_p(A^\varepsilon) \subset \{0 \leq Re\lambda^\varepsilon < \lambda_0^\varepsilon - \delta^\varepsilon\} \cup \{\lambda_0^\varepsilon\}$.*

On note N^ε et φ^ε une fonction propre et une fonction propre adjointe associées respectivement à l'opérateur $(A^\varepsilon, D(A^\varepsilon))$ et à son adjoint tels que $\displaystyle\int_1^\infty N^\varepsilon\varphi^\varepsilon(x)dx = 1$.

Théorème 2.14 *Supposons qu'il existe $\mu_0 > 0$ tel que $B(x) \geq \mu_0\varphi^\varepsilon(x)$. Alors pour toute donnée initiale $n_0 \in L^1(]1,+\infty[)$ la solution de (P^ε) vérifie :*

$$\int_1^\infty |\ \tilde{n}^\varepsilon(t,x) - m^0N^\varepsilon(x)\ |\ \varphi^\varepsilon(x)dx \leq e^{-\mu_0 t}\int_1^\infty |\ n_0(x) - m^0N^\varepsilon(x)\ |\ \varphi^\varepsilon(x)dx$$

où $m^0 = \displaystyle\int_1^\infty n_0(x)\varphi^\varepsilon(x)dx$ et $\tilde{n}^\varepsilon(t) := e^{-\lambda_0^\varepsilon t}n^\varepsilon(t)$.

Théorème 2.15 *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $n_0 \in L^1(]1,\infty[)$ tel qu'il existe une famille $(n_0^\varepsilon)_{\varepsilon \leq \varepsilon_0} \subset D((A^\varepsilon)^2)$, telle que $A^\varepsilon n_0^\varepsilon$ est bornée dans $L^2(]1,\infty[)$ et $\varepsilon' n_0 - n_0$ converge vers n_0 dans $L^2(]1,\infty[)$ faible et tel qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de ε telle que*

$$|n_0^\varepsilon(x)| \leq Ce^{(-\delta-\lambda_0)(x-1)},$$

il existe une sous-famille de $(n^\varepsilon = e^{tA^\varepsilon} n_0^\varepsilon)_{\varepsilon > \varepsilon_0}$ que l'on continue de noter $(n^\varepsilon)_{\varepsilon > \varepsilon_0}$ qui converge faiblement dans $L^2(]\not{0},\mathbb{T}[\times]1,+\infty[)$ vers n, unique solution faible du problème (1.2).

La suite du mémoire, consiste à démontrer les quatres théorèmes précédents.

3 Propriétés spectrales du problème (P^ε)

Pour démontrer le théorème (2.13), on a besoin de démontrer quelques lemmes et propositions intermédiaires.
On commence par rechercher les valeurs propres et vecteurs propres associés à l'opérateur $(A^\varepsilon, D(A^\varepsilon))$ c'est à dire $\lambda \in C$ et $V \in D(A^\varepsilon)$ tel que $V \neq 0$ et $A^\varepsilon V = \lambda V$. D'où

$$(S^\varepsilon) : \begin{cases} \varepsilon V'' - V' = \lambda V \\ V(1) - \varepsilon V'(1) = \int_1^\infty BV dy \end{cases} \tag{3.11}$$

On montre premièrement le résultat suivant

Lemme 3.1 *Pour tout $\varepsilon > 0$, l'opérateur $(A^\varepsilon, D(A^\varepsilon))$ admet une unique valeur propre réelle, notée λ_0^ε. De plus $\lambda_0^\varepsilon \in]0,+\infty[$.*

Preuve on doit résoudre

$$\lambda \in \mathbb{R}, V \neq 0, V \in D(A^\varepsilon) \text{ et } A^\varepsilon V = \lambda V. \text{ i.e résoudre le système } (S^\varepsilon).$$

Les solutions de la pemière équation sont de la forme

$$Ae^{s_1(x-1)} + Be^{s_2(x-1)}$$

où s_1 et s_2 sont les racines de

$$\varepsilon r^2 - r - \lambda = 0$$

et de la forme

$$e^{s(x-1)}(A(x-1) + B)$$

dans le cas d'une racine double.
Comme $s_1 + s_2 = \frac{1}{\varepsilon} > 0$, l'une des 2 racines a une partie réelle ≥ 0.
Or on cherche des fonctions dans $L^1(]1,+\infty[)$ donc la dimension de l'espace des solutions est 0 ou 1. Donc on cherche les fonctions $x \mapsto e^{s(x-1)}$ vérifiant (S^ε) et $Re(s) < 0$.
La condition aux limites de (3.11) impose que :

$$1 - \varepsilon s = \int_1^\infty Be^{s(y-1)} dy. \tag{3.12}$$

Posons

$$\phi(s) = \int_1^\infty B(y)e^{s(y-1)} dy + \varepsilon s - 1$$

cette fonction est continue et strictement croissante sur $]-\infty, 0[$. De plus

$$\phi(0) = \int_1^\infty B(y)dy - 1 > 0 \text{ et } \lim_{s \to -\infty} \phi(s) = -\infty$$

donc il existe un unique $s_0 < 0$ tel que $\phi(s_0) = 0$, c'est-à-dire de l'équation spectrale

$$H(\varepsilon, \lambda) = \int_1^\infty B(y) e^{s_0(y-1)} dy + \varepsilon s_0 - 1 = 0 \tag{3.13}$$

Or l'application

$$g : \{s; Re(s) < 0\} \to \{\lambda; Re(\lambda) > 0\}$$

définie par

$$\lambda = g(s) = \varepsilon s^2 - s \tag{3.14}$$

est bijective. Donc il existe un unique $\lambda_0^\varepsilon > 0$ valeur propre réelle de $(A^\varepsilon, D(A^\varepsilon))$.
Remarque : Notons $\|B\|_{L^\infty(1,+\infty)} = b$. On a

$$\phi(s) \leq b \int_1^\infty e^{s(x-1)} dy - \varepsilon s - 1 = \frac{b}{-s} + \varepsilon s - 1 = \frac{b - \varepsilon s^2 + s}{-s}.$$

Posons $\psi(s) = b - \varepsilon s^2 + s$, ψ est une application continue et strictement croissante sur $(-\infty, \frac{1}{2\varepsilon})$. De plus, $\psi(0) = b > 0$ et $\lim_{s \to -\infty} \psi(s) = -\infty$ donc il existe un unique $r_0 < 0$ tel que $\psi(r_0) = 0$. Mais $\phi(r_0) \leq \frac{\psi(r_0)}{-r_0} = 0$ et $\phi(s_0) = 0$. Comme ϕ est croissante sur $]-\infty, \frac{1}{2\varepsilon}[$, on a donc $r_0 \leq s_0$. Par ailleurs, g est décroissante sur $]-\infty, \frac{1}{2\varepsilon}[$ et donc $g(s_0) \leq g(r_0)$. Finalement, on obtient :

$$0 < \lambda_0^\varepsilon \leq b. \tag{3.15}$$

On remarquera que (3.15) donne pour λ_0^ε, une borne uniforme en ϵ.

Lemme 3.2 *Les valeurs propres de l' opérateur $(A^\varepsilon, D(A^\varepsilon))$ sont isolées .*

Preuve Soit $P = \{Z \in C; Re(Z) < 0\}$. L'application $\phi : P \to C$ définie précédement est la somme de deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 avec

$$\phi_1(s) = \int_1^\infty B(y) e^{s(y-1)} dy$$

et

$$\phi_2(s) = \varepsilon s - 1$$

ϕ_1 est la transformation de Laplace de la fonction B qui est une fonction $L^\infty(]1, \infty[)$ donc ϕ_1 est holomorphe dans P. De plus ϕ_2 étant aussi holomorphe dans P, ϕ l'est donc aussi et ses zéros sont tous isolés, par conséquent les valeurs propres de l' opérateur $(A^\varepsilon, D(A^\varepsilon))$ sont isolées .

Lemme 3.3 *Il n'existe pas de valeur propre complexe, λ telle que $Re(\lambda) = \lambda_0^\varepsilon$.*

Preuve Supposons qu'il existe $\lambda \in C$ valeur propre de A^ε telle que $\lambda = \lambda_0^\varepsilon + i\alpha$. ceci est équivalent à dire qu'il existe $\lambda \in C$ tel que $\lambda = \lambda_0^\varepsilon + i\alpha$ et $F(s) = 1$ où

$$F(s) = \int_1^\infty B(y)e^{s(y-1)}dy + \varepsilon s \text{ et } s = g^{-1}(\lambda).$$

On a

$$\begin{aligned} g(s_0) &= \lambda_0^\varepsilon = Re(\lambda) = Re(\varepsilon s^2 - s) \\ &= \varepsilon Re(s^2) - Re(s) \leq \varepsilon (Res)^2 - Re(s) \\ &= g(Re(s)). \end{aligned}$$

On distingue deux cas .
- $Re(s) < s_0$, on a

$$\begin{aligned} ReF(s) &= Re(\int_1^\infty B(y)e^{s(y-1)}dy + \varepsilon s) \\ &\leq \int_1^\infty B(y)e^{Res(y-1)}dy + \varepsilon Re(s) \\ &< \int_1^\infty B(y)e^{s_0(y-1)}dy + \varepsilon s_0 = F(s_0) = 1 \end{aligned}$$

  et c'est donc impossible.

- $Re(s) = s_0$, on a $s = s_0 + ib$ et $F(s) = 1$

  ceci implique que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_1^\infty B(y)e^{s_0(y-1)} \cos(b(y-1))dy + \varepsilon s_0 = 1 \\ \displaystyle\int_1^\infty B(y)e^{s_0(y-1)} \sin(b(y-1))dy + \varepsilon b = 0. \end{cases}$$

  Ce qui conduit à

$$\begin{cases} \displaystyle\int_1^\infty B(y)e^{s_0(y-1)} \ (cos(b(y-1)-1))dy = 0 \\ \displaystyle\int_1^\infty B(y)e^{s_0(y-1)} \sin(b(y-1))dy = -\varepsilon b. \end{cases}$$

  Ce qui exige que $\cos(b(y-1)) = 1$ et $\sin(b(y-1)) = 0$, $\forall y \in [1; +\infty[$. Donc forcement $b = 0$ et par conséquent $\lambda = \lambda_0^\varepsilon$.

Lemme 3.4 *Il n'existe pas de valeur propre complexe, λ tel que $Re(\lambda) > \lambda_0^\varepsilon$.*

Preuve Supposons qu'il existe $\lambda \in$ C tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > \lambda_0^\varepsilon$ et $F(s) = 1$ avec $s = g^{-1}(\lambda)$. Alors

$$\begin{aligned} g(s_0) &= \lambda_0^\varepsilon < Re(\lambda) = Re(\varepsilon s^2 - s) \\ &= \varepsilon Re(s^2) - Re(s) \\ &\leq \varepsilon (Res)^2 - Re(s) \\ &= g(Re(s)) \end{aligned}$$

donc $Re(s) < s_0$ et $F(s) = 1$. Or on a déja démontré qu'il n'existe pas un $s \in C$ tel que $Re(s) < s_0$ et $F(s) = 1$. Donc il n'existe pas de valeur propre de A^ε de partie réelle supérieure strict à λ_0^ε .

Lemme 3.5 *Il y a un nombre fini de valeurs propres de parties réelles inférieures à λ_0^ε.*

Preuve Soit $\lambda = a + ib$ avec $0 < a < \lambda_0^\varepsilon$. De (3.14) on déduit que $s = g^{-1}(\lambda)$.
Donc $s = \alpha + i\beta$ et $F(s) = 1$. D'où

$$\begin{cases} \displaystyle\int_1^\infty B(y)e^{\alpha(y-1)}\cos(\beta(y-1))dy + \varepsilon\alpha = 1 \\ \displaystyle\int_1^\infty B(y)e^{\alpha(y-1)}\sin(\beta(y-1))dy + \varepsilon\beta = 0 \end{cases}$$

Le terme $\displaystyle\int_1^\infty B(y)e^{\alpha(y-1)}\cos(\beta(y-1))dy = 1 - \varepsilon\alpha$. Comme cette quantité est strictement plus petite que 1 pour tout $\alpha > 0$ et comme on a supposé que $\displaystyle\int_1^\infty B(y)dy > 1$, il est nécessaire que $\alpha < 0$. Le théorème de Riemann-Lesbegue implique que $\displaystyle\int_1^\infty B(y)e^{\alpha(y-1)}\cos(\beta(y-1))dy$ tend vers 0 uniformément par rapport à α sur tout compact lorsque $\beta \nearrow \infty$. Comme les zéros de ϕ sont isolés il ne peut donc y en avoir qu'un nombre fini sur chaque compact.
D'où il existe un $\delta^\varepsilon > 0$ tel que $F(s) = 1$ et $\lambda \neq \lambda_0^\varepsilon \Rightarrow Re\lambda \notin]\lambda_0^\varepsilon - \delta^\varepsilon, \lambda_0^\varepsilon[$.

Lemme 3.6 *λ_0^ε est de multiplicité algébrique 1.*

Preuve Montrons que $Ker(A^\varepsilon - \lambda_0^\varepsilon I)^2 = Ker(A^\varepsilon - \lambda_0^\varepsilon I) = \mathbb{R}V$. Soit c $\in \mathbb{R}$ une constante arbitraire, résolvons le système

$$\begin{cases} A^\varepsilon\phi(x) = \lambda_0^\varepsilon\phi(x) + c\phi(x), & \forall x \in]1, \infty[\\ \phi(1) - \varepsilon\phi'(1) = \displaystyle\int_1^\infty B(x)\phi(x)dx. \end{cases}$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} \varepsilon\phi''(x) - \phi'(x) - \lambda_0^\varepsilon\phi(x) = cV(x), & \forall x \in]1, \infty[\\ \phi(1) - \varepsilon\phi'(1) = \displaystyle\int_1^\infty B(x)\phi(x)dx. \end{cases}$$

L'expression de ϕ solution de cette équation différentielle est alors :

$$\begin{aligned} \phi(x) = \quad & \phi(1)e^{s_2(x-1)} - \frac{1}{\varepsilon(s_1 - s_2)}\int_1^\infty B(x)\phi(x)dx(e^{s_1(x-1)} - e^{s_2(x-1)}) \\ & + \phi(1)\frac{s_1}{(s_1 - s_2)}(e^{s_1(x-1)} - e^{s_2(x-1)}) + \frac{c(x-1)}{\varepsilon(s_1 - s_2)}e^{s_1(x-1)} \\ & - \frac{c}{\varepsilon(s_1 - s_2)^2}(e^{s_1(x-1)} - e^{s_2(x-1)}) \end{aligned}$$

Avec s_1 et s_2 sont les solutions de l'équation caractéristique cette équation différentielle.

$$\begin{aligned}\phi'(x) = \quad & \phi(1)s_2e^{s_2(x-1)} - \frac{1}{\varepsilon(s_1-s_2)}\int_1^\infty B(x)\phi(x)dx(s_1e^{s_1(x-1)} - s_2e^{s_2(x-1)}) \\ & +\phi(1)\frac{s_1}{(s_1-s_2)}(s_1e^{s_1(x-1)} - s_2e^{s_2(x-1)}) + \frac{c}{\varepsilon(s_1-s_2)}e^{s_1(x-1)} \\ & +\frac{cs_1(x-1)}{\varepsilon(s_1-s_2)}e^{s_1(x-1)} - \frac{c}{\varepsilon(s_1-s_2)^2}(s_1e^{s_1(x-1)} - s_2e^{s_2(x-1)})\end{aligned}$$

et par conséquent on a

$$\phi^{'}(1) = \phi(1)s_2 - \frac{1}{\varepsilon}\int_1^\infty B(x)\phi(x)dx + \phi(1)s_1 + \frac{2c}{\varepsilon(s_1-s_2)}.$$

En utilisant la condition aux limites et que $s_1+s_2 = \frac{1}{\varepsilon}$, on obtient que c=0. Donc $A^\varepsilon\phi = \lambda_0^\varepsilon\phi$, ceci implique que $\phi(x) = \delta V(x)$, avec $\delta \in \mathbb{R}$. Donc la multiplicité algébrique de λ_0^ε est 1 .

Proposition 3.7 *Il existe un unique triplet* $(\lambda_0^\varepsilon, \varphi^\varepsilon, N^\varepsilon) \in]0,+\infty[\times W^{2,\infty}(]1,\infty[)\times D(A^\varepsilon)$ *tel que*

$$\begin{cases}(\varepsilon N^{\varepsilon\prime}(x) - N^\varepsilon(x))' = \lambda_0^\varepsilon N^\varepsilon(x) \\ N^\varepsilon(1) - \varepsilon N^{\varepsilon\prime}(1) = \displaystyle\int_1^\infty B(x)N^\varepsilon(x)dy\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\varepsilon\varphi^{\varepsilon\prime}(x) + \varphi^\varepsilon(x))' - \lambda_0^\varepsilon\varphi^\varepsilon(x) = -\varphi^\varepsilon(1)B(x) \\ \varphi^\varepsilon \geq 0, \varphi^\varepsilon(1) = 1, \varphi^{\varepsilon\prime}(1) = 0 \ et \ \displaystyle\int_1^\infty \varphi^\varepsilon(x)N^\varepsilon(x)dx = 1\end{cases}$$

Preuve On veut montrer qu'il existe un φ^ε tel que

$$\begin{cases}\varepsilon\varphi^{\varepsilon\prime\prime}(x) + \varphi^{\varepsilon\prime}(x) - \lambda_0^\varepsilon\varphi^\varepsilon(x) = -\varphi^\varepsilon(1)B(x)\forall x \in [1,\infty[& (3.16) \\ \varphi^\varepsilon(x) > 0 \qquad \forall x \in [1,\infty[& (3.17) \\ \varphi^\varepsilon \in W^{2,\infty}(]1,\infty[) & (3.18) \\ \varphi^{\varepsilon\prime}(1) = 0 & (3.19)\end{cases}$$

Les solutions de l'ESSM sont de la forme

$$\varphi^\varepsilon(x) = A_1e^{s_1(x-1)} + A_2e^{s_2(x-1)}$$

où

$$s_1 = \frac{-1-\sqrt{1+4\varepsilon\lambda_0^\varepsilon}}{2\varepsilon} < 0 \text{ et } s_2 = \frac{-1+\sqrt{1+4\varepsilon\lambda_0^\varepsilon}}{2\varepsilon} > 0$$

sont les solutions de l'équation caractéristique associée à l'ESSM vérifiée par φ^ε.
On trouve une solution particulière par la méthode de la variation de la constante :

$$\varphi_0^\varepsilon(x) = \frac{\varphi^\varepsilon(1)}{\varepsilon(s_2-s_1)}\int_1^x B(y)(e^{s_1(x-y)} - e^{s_2(x-y)})dy$$

Donc les solutions de (3.16) sont de la forme

$$\varphi^\varepsilon(x) = A_1 e^{s_1(x-1)} + A_2 e^{s_2(x-1)} + \varphi_0^\varepsilon(x)$$

Montrons qu'on peut choisir A_1 et A_2 de sorte que φ^ε soit bornée et positive .
En effet,

$$\varphi^\varepsilon(x) = \varphi_1^\varepsilon(x) + \varphi_2^\varepsilon(x)$$

avec

$$\varphi_1^\varepsilon(x) = A_1 e^{s_1(x-1)} + \frac{\varphi^\varepsilon(1)}{\varepsilon(s_2 - s_1)} \int_1^x B(y) e^{s_1(x-y)} dy$$

et

$$\varphi_2^\varepsilon(x) = e^{s_2(x-1)} \bigg(A_2 - \frac{\varphi^\varepsilon(1)}{\varepsilon(s_2 - s_1)} \int_1^x B(y) dy \bigg).$$

Puisque $s_1 < 0$ et $B \in L^\infty((1, \infty[)$, φ_1^ε est bornée sur $[1, \infty[$. Donc φ^ε est bornée ssi φ_2^ε est bornée ce qui nécessite que

$$A_2 = \frac{\varphi^\varepsilon(1)}{\varepsilon(s_2 - s_1)} \int_1^\infty B(y) e^{s_2(1-y)} dy. \tag{3.20}$$

Ensuite $\varphi^{\varepsilon\prime}(1) = A_1 s_1 + A_2 s_2$ et $\varphi^\varepsilon(1) = A_1 + A_2$, donc en écrivant $\varphi^{\varepsilon\prime}(1) = 0$ on obtient que $A_1 s_1 + A_2 s_2 = 0$, d'où

$$A_2 = \frac{-s_1 \varphi^\varepsilon(1)}{s_2 - s_1},$$

et

$$A_1 = \varphi^\varepsilon(1) \bigg(\frac{-s_2 \varphi^\varepsilon(1)}{s_2 - s_1} \bigg) > 0.$$

Donc $\varphi_1^\varepsilon > 0$ et en comparant avec (3.20), on obtient une condition nécessaire pour l'existence de φ^ε :

$$\int_1^\infty B(y) e^{s_2(1-y)} dy = -\varepsilon s_1. \tag{3.21}$$

Or on a déja démontré qu'il existe un unique $s_0 < 0$ qui vérifie l'équation (3.12) et que

$$s_0 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\varepsilon\lambda_0^\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

En remarquant que $1 - \varepsilon s_0 = -\varepsilon s_1$ et que $s_0 = -s_2$, on les remplace dans l'équation (3.12) on retrouve (3.21). On en déduit donc que la condition nécessaire de l'existence de φ^ε est assurée pour tout $\varepsilon > 0$.
Démontrons maintenant que si on choisit A_2 comme dans (3.20) alors φ^ε est bornée et positive. L'expression de φ^ε sera

$$\begin{aligned} \varphi^\varepsilon(x) = \ & -\frac{s_2 \varphi^\varepsilon(1)}{\varepsilon s_1 (s_2 - s_1)} \int_1^\infty B(y) e^{s_2(1-y)} dy e^{s_1(x-1)} + \frac{\varphi^\varepsilon(1)}{\varepsilon(s_2 - s_1)} \int_1^x B(y) e^{s_1(x-y)} dy \\ & + \frac{\varphi^\varepsilon(1)}{\varepsilon(s_2 - s_1)} \int_1^\infty B(y) e^{s_2(1-y)} dy e^{s_2(x-1)} - \frac{\varphi^\varepsilon(1)}{\varepsilon(s_2 - s_1)} \int_1^x B(y) e^{s_2(x-y)} dy. \end{aligned}$$

Posons

$$H(x) = \frac{\varphi^\varepsilon(1)}{\varepsilon(s_2 - s_1)} \int_1^\infty B(y) e^{s_2(1-y)} dy - \frac{\varphi^\varepsilon(1)}{\varepsilon(s_2 - s_1)} \int_1^x B(y) dy - \frac{\varphi^\varepsilon(1) \|B\|_\infty}{\varepsilon s_2 (s_2 - s_1)} e^{s_2(1-x)}.$$

H est une fonction continue et dérivable sur $[1,\infty[$ de plus on a

$$H'(x) = \frac{\varphi^{\varepsilon}(1)}{\varepsilon(s_2 - s_1)}\Big(\|B\|_{\infty} - B(x)\Big)e^{s_2(1-x)}$$

Donc $H' \geq 0$ et par conséquent H est croissante sur $[1,\infty[$, or $\lim\limits_{x\to\infty} H(x) = 0$, donc on peut en déduire que $H(x) \leq 0$ pour tout $x \in [1,\infty[$. Et par suite, on obtient que

$$\varphi_2^{\varepsilon}(x) = H(x)e^{s_2(x-1)} + \frac{\varphi^{\varepsilon}(1)\|B\|_{\infty}}{\varepsilon s_2(s_2 - s_1)} \leq \frac{\varphi^{\varepsilon}(1)\|B\|_{\infty}}{\varepsilon s_2(s_2 - s_1)} < \infty.$$

Donc φ_2^{ε} est bornée sur $[1,\infty[$ ce qui entraîne que φ^{ε} est bornée sur $[1,\infty[$. On peut déduire grâce à son expression et de l'équation qu'elle vérifie que $\varphi^{\varepsilon} \in W^{2,\infty}(]1,\infty[)$. De plus elle est strictement positive.
Enfin, on peut choisir φ^{ε} tel que $\varphi^{\varepsilon}(1) = 1$ et choisir $N^{\varepsilon}(1)$ tel que $\displaystyle\int_1^{\infty} \varphi^{\varepsilon}(x)N^{\varepsilon}(x)dx = 1$.

4 Existence et unicité de solutions faibles

Dans cette section on va démontrer que l'opérateur $(A^{\varepsilon}, D(A^{\varepsilon}))$ engendre un C_0 semi-groupe sur $L^1(]1,+\infty[)$. On va donc vérifier les hypothèses du théorème de Lumer-Phillips.

Proposition 4.1 *Le domaine $D(A^{\varepsilon})$ est dense dans $L^1(]1,\infty[)$.*

Preuve Soit $f \in C_c^1([1,\infty[)$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la suite de fonctions suivante :

$$h_n(x) = \frac{1}{n(x-1)^2 + 1} \quad \textit{pour } x \in [1,\infty[.$$

Montrons qu'il existe (a_n) une suite réelle définie par

$$f(1) - \varepsilon f'(1) + a_n = \int_1^{\infty} B(x)[f(x) + a_n h_n(x)]dx.$$

En effet, a_n existe ssi

$$1 - \int_1^{\infty} B(x)h_n(x)dx \neq 0. \tag{4.22}$$

Et dans ce cas

$$a_n = \frac{\int_1^{\infty} B(x)f(x)dx - f(1) + \varepsilon f'(1)}{1 - \int_1^{\infty} B(x)h_n(x)dx}.$$

Par définition de la suite (h_n) on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{\infty} B(x)h_n(x)dx = 0,$$

donc pour n suffisament grand (4.22) sera vérifié. Soit alors la suite

$$k_n(x) = f(x) + a_n h_n(x),$$

elle vérifie

$$k_n(1) - \varepsilon k_n'(1) = \int_1^{\infty} B(x)k_n(x)dx,$$

et $k_n \in L^1(]1,\infty[)$, $k'_n \in L^1(]1,\infty[)$, $A^\varepsilon k_n \in L^1(]1,\infty[)$ et la définition de (a_n) garantit la condition aux limites. Donc $(k_n) \subset D(A^\varepsilon)$ et on a

$$k_n \to f \quad dans\ L^1(]1,\infty[),$$

puisque h_n tend vers 0 quand $n \nearrow \infty$ et que (a_n) est bornée. Comme $C_c^1([1,\infty[)$ est dense dans $L^1(]1,\infty[)$ on en déduit la densité de $D(A^\varepsilon)$ dans $L^1(]1,\infty[)$.

Proposition 4.2 *Pour $Re(\lambda) > \lambda_0^\varepsilon$, $R(\lambda I - A^\varepsilon) = L^1(]1,\infty[)$.*

Preuve Soit $f \in L^1(]1,\infty[)$ il faut démontrer que pour $Re(\lambda) > \lambda_0^\varepsilon$ il existe un $u \in D(A^\varepsilon)$ tel que $\lambda u - A^\varepsilon u = f$. Il faut donc résoudre

$$\lambda u - \varepsilon u'' + u' = f. \tag{4.23}$$

Comme on cherche u dans $L^1(]1,\infty[)$, les calculs précédents conduisent à

$$u(x) = u(1)e^{s_1(x-1)} + \frac{1}{\varepsilon(s_2 - s_1)} \int_1^x f(y)e^{s_1(x-y)}dy.$$

On peut vérifier que si $Re(\lambda) > \lambda_0^\varepsilon$, $u \in L^1(]1,\infty[)$. De l'expression de u, on déduit que $u \in W^{1,1}(]1,\infty[)$ et que $A^\varepsilon u \in L^1(]1,\infty[)$. Il reste à vérifier la condition aux limites. On doit avoir donc

$$u(1) - \varepsilon u'(1) = u(1) \int_1^\infty B(x)e^{s_1(x-1)}dx + \frac{1}{\varepsilon(s_2 - s_1)} \int_1^\infty B(x) \int_1^x f(y)e^{s_1(x-1)}dydx,$$

ce qui conduit à

$$u(1)(1-\varepsilon s_1) - \frac{f(1)}{s_2 - s_1} = u(1) \int_1^\infty B(x)e^{s_1(x-1)}dx + \frac{1}{\varepsilon(s_2 - s_1)} \int_1^\infty \int_1^x B(x)f(y)e^{s_1(x-1)}dydx,$$

donc

$$u(1)(1 - F(s_1)) = \frac{f(1)}{s_2 - s_1} + \frac{1}{\varepsilon(s_2 - s_1)} \int_1^\infty \int_1^x B(x)f(y)e^{s_1(x-1)}dydx.$$

De l'équation spectrale

$$F \circ g^{-1}(\lambda_0^\varepsilon) = 1,$$

on déduit que pour tout λ tel que

$$F \circ g^{-1}(\lambda) \neq 1,$$

$$u(1) = (1 - F(s_1))^{-1} \left[\frac{f(1)}{s_2 - s_1} + \frac{1}{\varepsilon(s_2 - s_1)} \int_1^\infty \int_1^x B(x)f(y)e^{s_1(x-1)}dydx \right]$$

Et donc en prenant

$$u(x) = (1 - F(s_1))^{-1} \left[\frac{f(1)}{s_2 - s_1} + \frac{1}{\varepsilon(s_2 - s_1)} \int_1^\infty \int_1^x B(x)f(y)e^{s_1(x-1)}dydx \right] e^{s_1(x-1)}$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon(s_2 - s_1)} \int_1^x f(y)e^{s_1(x-y)}dy,$$

cette fonction est bien une solution de (4.23) dans $D(A^\varepsilon)$ pour tout λ tel que

$$F \circ g^{-1}(\lambda) \neq 1.$$

Donc on déduit que $\{\lambda \in \mathbb{C}; Re\lambda > \lambda_0^\varepsilon\} \subset \rho(A^\varepsilon)$.

Proposition 4.3 *Pour tout* $w \geq \|B\|_{L^\infty(]1,\infty[)}$, $A^\varepsilon - wI$ *est dissipatif.*

Preuve Soit v $\in D(A^\varepsilon)$ et $E = \{x \in]1,\infty[; v(x) = 0\} = v^{-1}\{0\}$. Soit $j(v) = \frac{v}{|v|}1_{E^c}\|v\|_{L^1(]1,\infty[)}$.
$j(v) \in J(v)$, en effet,
$|j(v)| \leq \|v\|_{L^1(]1,\infty[)} < \infty$ et donc $j(v) \in L^\infty(]1,\infty[)$.
Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\langle v, j(v)\rangle_{L^1(]1,\infty[)L^\infty(]1,\infty[)} &= \int_1^\infty \frac{v^2}{|v|}1_{E^c}\|v\|_{L^1(]1,\infty[)}dx \\ &= \|v\|_{L^1(]1,\infty[)}\int_1^\infty |v| = \|v\|^2_{L^1(]1,\infty[)} \\ &= \|j(v)\|^2_{L^\infty(]1,\infty[)}.\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\langle (A^\varepsilon v - wv, j(v)\rangle_{L^1(]1,\infty[)L^\infty(]1,\infty[)} &= \int_1^\infty j(v)(\varepsilon v' - v)'dx - w\int_1^\infty vj(v)dx \\ &= \int_1^\infty j(v)(\varepsilon v' - v)'dx - w\|v\|^2_{L^1(]1,\infty[)}.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Or

Lemme 4.4 *Soit* $v \in W^{2,1}(]1,+\infty[)$, $E = v^{-1}\{0\}$ *et* $j(v) = \frac{v}{|v|}1_{E^c}\|v\|_{L^1(]1,\infty[)}$. *On a,*

$$\int_1^\infty j(v)(\varepsilon v' - v)'dx \leq \|v\|_{L^1(]1,\infty[)}(\varepsilon v'(1) - v(1))\frac{v(1)}{|v(1)|}1_{E^c}. \tag{4.25}$$

Preuve En effet, soit la suite

$$S_n(s) = \begin{cases} \frac{s}{|s|} & \text{si } |s| \geq \frac{1}{n} \\ sn & \text{si } |s| < \frac{1}{n}\end{cases}$$

Pour toute fonction $v \in L^1(]1,\infty[)$, $S_n(v)$ converge simplement vers $\frac{v}{|v|}1_{E^c}$, donc $(\varepsilon v' - v)'S_n(v)$ converge simplement vers $(\varepsilon v' - v)'\frac{v}{|v|}1_{E^c}$, de plus on a $|(\varepsilon v' - v)'S_n(v)| \leq |(\varepsilon v' - v)'| \in L^1(]1,\infty[)$, donc par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue on obtient que $(\varepsilon v' - v)'S_n(v)$ converge vers $(\varepsilon v' - v)'\frac{j(v)}{\|v\|_{L^1([1,\infty[)}}$ dans $L^1(]1,\infty[)$.
Donc

$$\begin{aligned}\int_1^\infty j(v)(\varepsilon v' - v)'dx &= \lim_{n\to\infty}\|v\|_{L^1(]1,\infty[)}\int_1^\infty(\varepsilon v' - v)'S_n(v)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\|v\|_{L^1(]1,\infty[)}\left[-\int_1^\infty(\varepsilon v' - v)S_n'(v)dx - (\varepsilon v'(1) - v(1))S_n(v(1))\right] \\ &= -\lim_{n\to\infty}\|v\|_{L^1(]1,\infty[)}\left[\int_1^\infty(\varepsilon v' - v).n.v'.1_{\{|v|<\frac{1}{n}\}}dx + (\varepsilon v'(1) - v(1))S_n(v(1))\right] \\ &= -\lim_{n\to\infty}\|v\|_{L^1(]1,\infty[)}\left[\int_1^\infty \varepsilon(v')^2.n.1_{\{|v|<\frac{1}{n}\}}dx - \int_1^\infty v.n.v'.1_{\{|v|<\frac{1}{n}\}}dx\right. \\ &\qquad \left. + (\varepsilon v'(1) - v(1))S_n(v(1))\right] \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\|v\|_{L^1(]1,\infty[)}\left[\int_1^\infty v.n.v'.1_{\{|v|<\frac{1}{n}\}}dx - (\varepsilon v'(1) - v(1))S_n(v(1))\right].\end{aligned}$$

Or, $v'.n.v.1_{\{|v|<\frac{1}{n}\}}$ converge simplement vers 0, de plus,

$$\left|v'.n.v.1_{\{|v|<\frac{1}{n}\}}\right| \leq \left|v'\right| \in L^1(]1,\infty[),$$

donc en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue on trouve que $v.n.v^{'}.1_{\{|v|<\frac{1}{n}\}}$ converge vers 0 dans $L^1(]1,\infty[)$. Et par conséquent, on obtient

$$\int_1^\infty j(v)(\varepsilon v' - v)'dx \leq \|v\|_{L^1(]1,\infty[)}(\varepsilon v'(1) - v(1))\frac{v(1)}{|v(1)|}1_{E^c}.$$

Ce qui montre le lemme.

En appliquant ce lemme sur l'équation (4.24) on obtient que

$$\langle A^\varepsilon v - wv, j(v)\rangle_{L^1(]1,\infty[)L^\infty(]1,\infty[)} \leq \begin{cases} -w\|v\|^2_{L^1([1,\infty[)} & \text{si } v(1)=0 \\ \frac{v(1)}{|v(1)|}\int_1^\infty B(x)v(x)dx - w\|v\|^2_{L^1(]1,\infty[)} & \text{si } v(1)\neq 0 \end{cases}$$

$$\leq (\|B\|_{L^\infty(]1,\infty[)} - w)\|v\|^2_{L^1(]1,\infty[)}.$$

Donc pour tout v $\in D(A^\varepsilon)$ on a trouvé un $j(v) \in L^\infty(]1,\infty[)$ tel que $Re\,\langle A^\varepsilon v - wv, j(v)\rangle_{L^1(]1,\infty[)L^\infty(]1,\infty[)} \leq 0$ pour tout $w \geq \|B\|_{L^\infty(]1,\infty[)}$, ce qui montre la dissipativité de $A^\varepsilon - wI$.

En utilisant le théorème (2.7) on peut déduire que l'opérateur $(A^\varepsilon - wI, D(A^\varepsilon))$ engendre un C_0 semi-groupe de contractions sur $L^1(]1,\infty[)$ ce qui est équivalent à dire que $(A^\varepsilon, D(A^\varepsilon))$ engendre un C_0 semi-groupe sur $L^1(]1,\infty[)$.

Enfin on peut en conclure que pour chaque ε fixé et pour toute donnée initiale $n_0 \in L^1(]1,\infty[)$, il existe une unique faible solution $n^\varepsilon \in C([0,+\infty[, L^1(]1,\infty[))$ de (P^ε) et elle donnée par

$$n^\varepsilon(t) = e^{tA^\varepsilon}n_0.$$

5 Comportement asymptotique des solutions faibles

Dans cette section, et afin de démontrer le Théorème (2.14) qui nous donne une estimation asymptotique en temps de notre solution, on pose

$$\tilde{n}^\varepsilon(t) = e^{-\lambda_0^\varepsilon t}n^\varepsilon(t).$$

D'abord on va démontrer le Théorème (2.14) pour toute donnée initiale n_0 dans $D(A^\varepsilon)$. Pour cela on aura besoin de deux lemmes. Le premier démontre la conservation de la moyenne de la fonction $\tilde{n}^\varepsilon(t,x)\varphi^\varepsilon(x)$ au cours du temps et un deuxième qui montre une inégalité qu'on va l'utiliser pour achever la démonstration.

Lemme 5.1 $\displaystyle\int_1^\infty \tilde{n}^\varepsilon(t,x)\varphi^\varepsilon(x)dx = \int_1^\infty n_0(x)\varphi^\varepsilon(x)dx.$

Preuve On a par définition de $\tilde{n}^\varepsilon$ que

$$\partial_t \tilde{n}^\varepsilon(t,x) + \partial_x(\tilde{n}^\varepsilon(t,x) - \varepsilon\partial_x \tilde{n}^\varepsilon(t,x)) = -\lambda_0^\varepsilon \tilde{n}^\varepsilon(t,x).$$

En multipliant par φ^ε et intégrant par rapport à x on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_1^\infty \tilde{n}^\varepsilon(t,x)\varphi^\varepsilon(x)dx - \int_1^\infty B(x)\tilde{n}^\varepsilon(t,x)dx - \int_1^\infty \tilde{n}^\varepsilon(t,x)\partial_x\varphi^\varepsilon(x)dx$$
$$+\varepsilon\int_1^\infty \partial_x\tilde{n}^\varepsilon(t,x)\partial_x\varphi^\varepsilon(x)dx = -\lambda_0^\varepsilon\int_1^\infty \tilde{n}^\varepsilon(t,x)\varphi^\varepsilon(x)dx$$

Donc aprés une intégration par partie et en utilisant le fait que $\partial_x\varphi^\varepsilon(1)=0$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_1^\infty \tilde{n}^\varepsilon(t,x)\varphi^\varepsilon(x)dx - \int_1^\infty B(x)\tilde{n}^\varepsilon(t,x)dx - \int_1^\infty \tilde{n}^\varepsilon(t,x)\partial_x(\varphi^\varepsilon(x)+\varepsilon\partial_x\varphi^\varepsilon(x))dx$$
$$= \lambda_0^\varepsilon\int_1^\infty \tilde{n}^\varepsilon(t,x)\varphi^\varepsilon(x)dx.$$

Et par conséquent

$$\frac{d}{dt}\int_1^\infty \tilde{n}^\varepsilon(t,x)\varphi^\varepsilon(x)dx = \int_1^\infty \tilde{n}^\varepsilon(t,x)(\partial_x(\varphi^\varepsilon(x)+\varepsilon\partial_x\varphi^\varepsilon(x)) + B(x) - \lambda_0^\varepsilon\varphi^\varepsilon(x))dx.$$

Donc du lemme (3.7) on déduit que

$$\frac{d}{dt}\int_1^\infty \tilde{n}^\varepsilon(t,x)\varphi^\varepsilon(x)dx = 0.$$

Ce qui montre le lemme en intégrant sur [0,T].

Lemme 5.2 *Pour tout $v\in W^{2,1}(]1,+\infty[)$ et pour tout $\varphi\in W^{2,\infty}(]1,+\infty[)$ tel que $\varphi'(1)=0$, on a*

$$\begin{aligned}\int_1^\infty (\varepsilon v'(x)-v(x))' j(v)\varphi(x)dx &\le \varphi(1)\|v\|_{L^1(]1,\infty[)}(v(1)-\varepsilon v'(1))\frac{v(1)}{|v(1)|}1_{E^c}\\ &+\int_1^\infty |\, v(x)\,|\,(\varepsilon\varphi'(x)+\varphi(x))'dx\end{aligned}$$

Preuve Posons

$$I_n = \int_1^\infty \partial_x(v(x)-\varepsilon\partial_x v(x))\varphi(x)S_n(v)dx,$$

En effectuant une intégration par partie, on obtient,

$$I_n = -S_n(v(1))(v(1)-\varepsilon v'(1))\varphi(1) - \int_1^\infty (v(x)-\varepsilon\partial_x v(x))(S_n(v)\varphi(x))'dx$$

donc

$$\begin{aligned}I_n = &-S_n(v(1))(v(1)-\varepsilon v'(1))\varphi(1) - \int_1^\infty (v(x)-\varepsilon v'(x))\varphi(x)(S_n(v))'dx\\ &-\int_1^\infty (v(x)-\varepsilon v'(x))S_n(v)\varphi'(x)dx.\end{aligned}$$

Et donc, en procédant comme pour la démonstration de la dissipativité de A^ε, on obtient

$$\begin{aligned} I_n \geq \quad & -\varphi(1)S_n(v(1))(v(1)-\varepsilon v'(1))\varphi(1) - \int_1^\infty \varphi(x)v'(x)v(x)n1_{\{|v|<\frac{1}{n}\}}dx \\ & - \int_1^\infty v(x)\varphi'(x)S_n(v)dx + \varepsilon\int_1^\infty v'(x)\varphi'(x)S_n(v)dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I_n \geq \quad & -\varphi(1)S_n(v(1))(v(1)-\varepsilon v'(1))\varphi(1) - \int_1^\infty \varphi(x)v'(x)v(x)n1_{\{|v|<\frac{1}{n}\}}dx \\ & - \int_1^\infty v(x)\varphi'(x)S_n(h)dx + \varepsilon\int_1^\infty \varphi'(x)(v(x)S_n(v))'dx \\ & -\varepsilon\int_1^\infty \varphi'(x)v(x)S_n'(v)dx. \end{aligned}$$

En effectuant une deuxième intégration par partie et en utilisant que $\varphi'(1) = 0$, on obtient,

$$\begin{aligned} I_n \geq \quad & -S_n(v(1))(v(1)-\varepsilon v'(1))\varphi(1) - \int_1^\infty \varphi(x)v'(x)v(x)n1_{\{|v|<\frac{1}{n}\}}dx \\ & - \int_1^\infty v(x)\varphi'(x)S_n(v)dx - \varepsilon\int_1^\infty \varphi''(x)v(x)S_n(v)dx \\ & -\varepsilon\int_1^\infty \varphi'(x)v'(x)v(x)1_{\{|v|<\frac{1}{n}\}}dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I_n \geq \quad & -S_n(v(1))(v(1)-\varepsilon v'(1))\varphi(1) - \int_1^\infty \varphi(x)v'(x)v(x)n1_{\{|v|<\frac{1}{n}\}}dx \\ & -\varepsilon\int_1^\infty \varphi'(x)v'(x)v(x)1_{\{|v|<\frac{1}{n}\}}dx - \int_1^\infty v(x)S_n(v)(\varphi(x)+\varepsilon\varphi(x))'dx. \end{aligned}$$

Ce qui montre notre lemme, en faisant tendre n vers $+\infty$ et en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue comme on a fait dans le lemme (4.4).

Démonstration du théorème (2.14)

Posons

$$h(t,x) := \tilde{n}^\varepsilon(t,x) - m^0N^\varepsilon(x)$$

Par linéarité du problème (P^ε), h vérifie

$$\partial_t h(t,x) + \partial_x(h(t,x) - \varepsilon\partial_x h(t,x)) + \lambda_0^\varepsilon h(t,x) = 0 \tag{5.26}$$

$$h(t,1) - \varepsilon\partial_x h(t,1) = \int_1^\infty B(x)h(t,x)dx \tag{5.27}$$

Multiplions l'équation (5.26) par $\varphi^\varepsilon j(h)$ et intégrons par rapport à x, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_1^\infty \mid h(t,x)\mid \varphi^\varepsilon(x)dx \quad & + \int_1^\infty \partial_x(h(t,x)-\varepsilon\partial_x h(t,x))j(h)\varphi^\varepsilon(x)dx \\ & + \lambda_0^\varepsilon\int_1^\infty \mid h(t,x)\mid \varphi^\varepsilon(x)dx = 0. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme (5.2) sur h et φ^ε qui vérifie bien les hypothèses, avec $\varphi^\varepsilon(1) = 1$ on trouve que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_1^\infty \mid h(t,x) \mid \varphi^\varepsilon(x)dx \quad &+\lambda_0^\varepsilon \int_1^\infty \mid h(t,x) \mid \varphi^\varepsilon(x)dx \leq \mid \int_1^\infty B(x)h(t,x)dx \mid \\ &+\lambda_0^\varepsilon \int_1^\infty \mid h(t,x) \mid \varphi^\varepsilon(x)dx - \int_1^\infty B(x) \mid h(t,x) \mid dx\end{aligned}$$

et par suite

$$\frac{d}{dt}\int_1^\infty \mid h(t,x) \mid \varphi^\varepsilon(x)dx \leq \mid \int_1^\infty B(x)h(t,x)dx \mid - \int_1^\infty B(x) \mid h(t,x) \mid dx$$

Donc en tenant compte du lemme (5.1), on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_1^\infty \mid h(t,x) \mid \varphi^\varepsilon(x)dx \leq \quad & \mid \int_1^\infty (\varphi^\varepsilon(1)B(x) - \mu_0\varphi^\varepsilon(x))h(t,x)dx \mid \\ & \int_1^\infty B(x) \mid h(t,x) \mid dx.\end{aligned}$$

Et donc on trouve que

$$\frac{d}{dt}\int_1^\infty \mid h(t,x) \mid \varphi^\varepsilon(x)dx \leq -\mu_0 \int_1^\infty \mid h(t,x) \mid \varphi^\varepsilon(x)dx.$$

Donc pour toute donnée initiale n_0 dans $D(A^\varepsilon)$ on peut conclure le théorème (2.14) en intégrant cette inéquation différentielle sur l'intervalle [0,t].

Maintenant supposons que $n_0 \in L^1(]1,+\infty[)$.
On sait d'aprés la Proposition (4.1) que $D(A^\varepsilon)$ dense dans $L^1(]1,+\infty[)$. Donc il existe une suite $(n_{0i})_i$ dans $D(A^\varepsilon)$ qui converge vers n_0 dans $L^1(]1,+\infty[)$. On définit la suite $(\tilde{n}_i^\varepsilon)_i$ par :

$$\tilde{n}_i^\varepsilon = e^{tA_0^\varepsilon} n_{0i} \tag{5.28}$$

Où $A_0^\varepsilon = A^\varepsilon - \lambda_0^\varepsilon I$. Cette suite est bien définie du fait que $(A_0^\varepsilon, D(A^\varepsilon))$ engendre le C_0 semi-groupe $e^{-\lambda_0^\varepsilon t}e^{tA^\varepsilon}$. Et d'après le fait qu'un C_0 semi-goupe est une application continue sur l'espace de Banach X, pour tout $t \in [0,\infty[$, on a $\lim_i e^{tA_0^\varepsilon} n_{0i} = \tilde{n}_i^\varepsilon(t)$, convergence dans $L^1(]1,\infty[$. Or, on a déja démontré que pour tout $n_{0i} \in D(A^\varepsilon)$ on a,

$$\int_1^\infty \mid \tilde{n}_i^\varepsilon(t,x) - m^0 N^\varepsilon(x) \mid \varphi^\varepsilon(x)dx \leq e^{-\mu_0 t}\int_1^\infty \mid n_{0i}(x) - m^0 N^\varepsilon(x) \mid \varphi^\varepsilon(x)dx.$$

Donc

$$\lim_{i\to+\infty}\int_1^\infty \mid \tilde{n}_i^\varepsilon(t,x) - m^0 N^\varepsilon(x) \mid \varphi^\varepsilon(x)dx \leq \lim_{i\to+\infty} e^{-\mu_0 t}\int_1^\infty \mid n_{0i}(x) - m^0 N^\varepsilon(x) \mid \varphi^\varepsilon(x)dx.$$

Et parsuite,

$$\int_1^\infty \mid \tilde{n}^\varepsilon(t,x) - m^0 N^\varepsilon(x) \mid \varphi^\varepsilon(x)dx \leq e^{-\mu_0 t}\int_1^\infty \mid n_0(x) - m^0 N^\varepsilon(x) \mid \varphi^\varepsilon(x)dx.$$

Ce qui finit la démonstration du Théorème 2.14.

6 Convergence lorsque ε tend vers 0^+

Le but de cette section est l'étude de la convergence de n^ε quand ε tend vers 0. On s'attend à ce que pour des conditions initiales bien choisies n^ε converge, dans un sens à préciser, vers la solution du problème

$$\begin{cases} n_t = -n_x & \forall (x,t) \in]1,\infty[\times]0,T[\\ n(1,t) = \displaystyle\int_1^\infty B(y)n(y,t)dy & \forall t \in]0,T[\\ n(0,x) = n_0(x) & \forall x \in]1,\infty[\end{cases}$$

Lemme 6.1 *Pour tout $n_0 \in L^1(]1,+\infty[)$ et pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé on a,*

$$\int_1^\infty |\ \tilde{n}^\varepsilon(t,x)\ |\ \varphi^\varepsilon(x)dx \leq \int_1^\infty |\ n_0(x)\ |\ \varphi^\varepsilon(x)dx.$$

Preuve On a

$$\partial_t \tilde{n}^\varepsilon(t,x) + \partial_x(\tilde{n}^\varepsilon(t,x) - \varepsilon\partial_x \tilde{n}^\varepsilon(t,x)) + \lambda_0^\varepsilon \tilde{n}^\varepsilon(t,x) = 0 \tag{6.29}$$

$$\tilde{n}^\varepsilon(t,1) - \varepsilon\partial_x \tilde{n}^\varepsilon(t,1) = \int_1^\infty B(x)\tilde{n}^\varepsilon(t,x)dx \tag{6.30}$$

Supposons d'abord que $n_0 \in D(A^\varepsilon)$.
Donc $\tilde{n}^\varepsilon(t) \in D(A^\varepsilon)$ et par suite est puisque $\varphi^\varepsilon \in W^{2,\infty}(]1,+\infty[)$, les hypothèses du lemme (5.2) sont vérifiées. Donc en procédant comme dans la démonstration du théorème 2.14, on obtient que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_1^\infty |\ \tilde{n}^\varepsilon(t,x)\ |\ \varphi^\varepsilon(x)dx &\leq \left| \int_1^\infty B(x)\tilde{n}^\varepsilon(t,x)dx \right| - \int_1^\infty B(x)\ |\ \tilde{n}^\varepsilon(t,x)\ |\ dx \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Donc on peut en déduire que pour tout $n_0 \in D(A^\varepsilon)$ on a,

$$\int_1^\infty |\ \tilde{n}^\varepsilon(t,x)\ |\ \varphi^\varepsilon(x)dx \leq \int_1^\infty |\ n_0(x)\ |\ \varphi^\varepsilon(x)dx.$$

Maintenant, si on prend $n_0 \in L^1(]1,+\infty[)$. Du fait de la densité du $D(A^\varepsilon)$ dans $L^1(]1,+\infty[)$, on peut procéder comme dans le théorème (2.14) et en déduire que l'estimation est encore vraie pour $n_0 \in L^1(]1,+\infty[)$.
On va maintenant montrer la positivité du semigroupe. Commençons par définir

$$\begin{cases} \tilde{n}^{\varepsilon+}(t) &= \max(\tilde{n}^\varepsilon(t),0) \\ \tilde{n}^{\varepsilon-}(t) &= -\max(\tilde{n}^\varepsilon(t),0). \end{cases}$$

Lemme 6.2 *Pour tout $n_0 \in L^1(]1,+\infty[)$ et pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé on a,*

$$\int_1^\infty \tilde{n}^{\varepsilon+}(t,x)\varphi^\varepsilon(x)dx \leq \int_1^\infty n_0^+(x)\varphi^\varepsilon(x)dx.$$

Preuve Soit la suite

$$S_n^+(s) := \begin{cases} 1 & \text{si } s \geq \frac{1}{n} \\ sn & \text{si } 0 < s < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } s \leq 0 \end{cases}$$

Multiplions l'équation (3.16) par $\varphi^\varepsilon S_n^+(\tilde{n}^\varepsilon)$ et intégrons par rapport à x, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_1^\infty h(t,x)\varphi^\varepsilon(x)S_n^+(\tilde{n}^\varepsilon)dx \quad &+ \int_1^\infty \partial_x(\tilde{n}^\varepsilon(t,x) - \varepsilon\partial_x\tilde{n}^\varepsilon(t,x))\varphi^\varepsilon(x)S_n(\tilde{n}^\varepsilon)dx \\ &+\lambda_0^\varepsilon \textstyle\int_1^\infty \tilde{n}^\varepsilon(t,x)\varphi^\varepsilon(x)S_n(\tilde{n}^\varepsilon)dx = 0. \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_1^\infty \tilde{n}^{\varepsilon+}(t,x)\varphi^\varepsilon(x)dx + \lambda_0^\varepsilon\int_1^\infty \tilde{n}^{\varepsilon+}(t,x)\varphi^\varepsilon(x)dx = -\lim_{n\to+\infty} I_n^+.$$

Avec

$$I_n^+ := \int_1^\infty \partial_x(\tilde{n}^\varepsilon(t,x) - \varepsilon\partial_x\tilde{n}^\varepsilon(t,x))\varphi^\varepsilon(x)S_n^+(\tilde{n}^\varepsilon)dx.$$

En répétant le même calcul déja fait dans la démonstration du lemme (5.2), on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_1^\infty \tilde{n}^{\varepsilon+}(t,x)\varphi^\varepsilon(x)dx \quad &+\lambda_0^\varepsilon\int_1^\infty \tilde{n}^{\varepsilon+}(t,x)\varphi^\varepsilon(x)dx \leq H(\tilde{n}^\varepsilon(1))\int_1^\infty B(x)\tilde{n}^\varepsilon(t,x)dx \\ &+\lambda_0^\varepsilon\int_1^\infty \tilde{n}^{\varepsilon+}(t,x)\varphi^\varepsilon(x)dx - \int_1^\infty B(x)\tilde{n}^{\varepsilon+}(t,x)dx \end{aligned}$$

avec

$$H(\tilde{n}^\varepsilon(1)) = \lim_{n\to+\infty} S_n^+(\tilde{n}^\varepsilon(1)) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{n}^\varepsilon(1) > 0 \\ 0 & \text{si } \tilde{n}^\varepsilon(1) \leq 0 \end{cases}$$

Et pa conséquent on obtient que

$$\frac{d}{dt}\int_1^\infty \tilde{n}^{\varepsilon+}(t,x)\varphi^\varepsilon(x)dx \leq \begin{cases} \displaystyle\int_1^\infty B(x)\tilde{n}^\varepsilon(t,x)dx - \int_1^\infty B(x)\tilde{n}^{\varepsilon+}(t,x)dx & \text{si } \tilde{n}^\varepsilon(1) > 0 \\ \displaystyle-\int_1^\infty B(x)\tilde{n}^{\varepsilon+}(t,x)dx. & \text{si } \tilde{n}^\varepsilon(1) \leq 0 \end{cases}$$

Ce qui nous permet d'en déduire que,

$$\frac{d}{dt}\int_1^\infty \tilde{n}^{\varepsilon+}(t,x)\varphi^\varepsilon(x)dx \leq 0.$$

Cette estimation va nous permettre de montrer la positivité du semi-groupe $(e^{tA^\varepsilon})_t \geq 0$. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 6.3 *Pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé et pour tous n_0^1 et n_0^2 dans $L^1(]1,+\infty[)$ on a*

$$n_0^1 \leq n_0^2 \Rightarrow \tilde{n}_1^\varepsilon(t) \leq \tilde{n}_2^\varepsilon(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve Il suffit de démontrer que tout $n_0 \in L^1(]1,+\infty[)$, tel que $n_0 \leq 0$ alors $\tilde{n}^\varepsilon(t) \leq 0$. On sait que $\tilde{n}^\varepsilon(t) \leq 0$ si et seulement si $\tilde{n}^{\varepsilon+}(t) = 0$. D'après le lemme (6.2), on a

$$0 \leq \int_1^\infty \tilde{n}^{\varepsilon+}(t,x)\varphi^\varepsilon(x)dx \leq \int_1^\infty n_0^+(x)\varphi^\varepsilon(x)dx,$$

comme $n_0 \leq 0$, on a $n_0^+ = 0$, et par conséquent :

$$\int_1^\infty \tilde{n}^{\varepsilon+}(t,x)\varphi^\varepsilon(x)dx = 0.$$

Or, d'après la proposition (3.7), φ^ε est strictement positive et par définition, $\tilde{n}^{\varepsilon+} \geq 0$. Donc on a $\tilde{n}^{\varepsilon+}(t) = 0 \ \ \forall t \geq 0$ ce qui est équivalent à dire que $\tilde{n}^\varepsilon(t) \leq 0 \ \ \forall t \geq 0$.
Revenons au cas où on a n_0^1 et n_0^2 deux conditions initiales telles que $n_0^1 \leq n_0^2$ et posons $n_0 := n_0^1 - n_0^2$. Par linéarité du problème, on a

$$\begin{aligned}\tilde{n}^\varepsilon(t) = e^{tA_0^\varepsilon}n_0 \ &= e^{tA_0^\varepsilon}n_0^1 - e^{tA_0^\varepsilon}n_0^2 \\ &= \tilde{n}_1^\varepsilon(t) - \tilde{n}_2^\varepsilon(t)\end{aligned}$$

Or on a supposé que $n_0 \leq 0$ ceci implique que $\tilde{n}^\varepsilon(t) \leq 0$ donc $\tilde{n}_1^\varepsilon(t) \leq \tilde{n}_2^\varepsilon(t) \ \ \forall t \geq 0$. Ce qui montre le lemme.

Une autre résultat découle du principe de comparaison démontré dans le lemme (6.3), c'est le principe du maximum.
Soit H définie dans (3.13). On peut vérifier que $H(0,\lambda_0) = 0$, où $\lambda_0 > 0$ est la valeur propre réelle de $A^0 = A$ dont l'existence a été prouvée dans [3]. De plus, la fonction H est de classe C^1 au voisinage de $(0,\lambda_0)$ et $\partial_\lambda H(0,\lambda_0) = -2 \neq 0$. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites à H et on en déduit l'existence d'une application $\lambda(\varepsilon)$ de classe C^1 au voisinage de 0. De plus $\lambda(\varepsilon) = \lambda^\varepsilon$ et tend vers $\lambda_0 > 0$. De plus s_1 tend vers $(-\lambda_0)$ où λ_0 est l'unique valeur propre réelle de l'opérateur A^0. On peut donc choisir un $0 < \delta < \lambda_0$ tel que pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ assez petit on ait

$$\mid s_1 + \lambda_0 \mid < \delta. \tag{6.31}$$

On a alors

Lemme 6.4 *Soit ε_0 et δ définis dans (6.31). Pour toute donnée initiale n_0^ε telle qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|n_0^\varepsilon(x)| \leq Ce^{(-\delta-\lambda_0)(x-1)},$$

on a que pour tout $t \geq 0$, $(n^\varepsilon(t))_{\varepsilon \geq \varepsilon_0}$ est bornée dans $L^1 \cap L^\infty(]1,+\infty[)$.

Preuve De (6.31), $|n_0^\varepsilon(x)| \leq C1e^{(-\delta-\lambda_0)(x-1)}$ implique

$$|n_0^\varepsilon(x)| \leq Ce^{s_1(x-1)}.$$

Du principe de comparaison, lemme (6.3), on déduit :

$$e^{tA^\varepsilon}(-Ce^{s_1(x-1)}) \leq e^{tA^\varepsilon}n_0 \leq e^{tA^\varepsilon}(Ce^{s_1(x-1)}).$$

Comme $e^{s_1(x-1)}$ est un vecteur propre de l'opérateur A^ε, $e^{tA^\varepsilon}(Ce^{s_1(x-1)})$, la solution associée à la donnée initiale $Ce^{s_1(x-1)}$, vérifie $e^{tA^\varepsilon}(Ce^{s_1(x-1)}) = Ce^{\lambda_0^\varepsilon t}e^{s_1(x-1)}$. Par conséquent on obtient que

$$-Ce^{\lambda_0^\varepsilon t}e^{s_1(x-1)} \leq n^\varepsilon(t) \leq Ce^{\lambda_0^\varepsilon t}e^{s_1(x-1)} \ \ \forall t \geq 0.$$

Par conséquent on a

$$|n^\varepsilon(t,x)| \leq Ce^{\lambda_0^\varepsilon t} e^{(\delta-\lambda_0)(x-1)} \quad \forall t \geq 0.$$

Tenant compte de (3.15), on obtient :

$$|n^\varepsilon(t,x)| \leq Ce^{t\|B\|_{L^\infty}} e^{(\delta-\lambda_0)(x-1)} \quad \forall t \geq 0.$$

Donc $(n^\varepsilon(t))_{\varepsilon\leq\varepsilon_0}$ est bien bornée dans $L^1 \cap L^\infty(]1,+\infty[)$ pour tout $t \geq 0$.

Lemme 6.5 *Sous les hypothèses du lemme précédent, et si de plus* $n_0^\varepsilon \in D(A^\varepsilon)$*, on a*

$$\|n^e(t)\|^2_{L^2(]1,+\infty[)} + \varepsilon \int_0^T \|n_x^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(]1,+\infty[)} dt + \frac{1}{4}\int_0^T |n^\varepsilon(1,t)|^2 dt \leq 4\|n_0\|^2_{L^2(]1,+\infty[)} e^{4T\|B\|^2_{L^2(]1,\infty[)}}.$$

Preuve Si $n_0^\varepsilon \in D(A^\varepsilon)$ alors n^ε est $C^1(0,T]; L^1(]1,\infty[)$, donc $\partial_t n^\varepsilon$ est dans $C^0([0,T]; L^1(]1,\infty[)$, comme le lemme ci-dessus montre que n^ε est dans $L^\infty((0,T)\times]1,\infty[)$, on peut multiplier l'équation (2.5) par n^ε. En intégrant par rapport à x sur $]1,+\infty[$, et en tenant compte de la condition aux limites, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_1^\infty |n^\varepsilon(t)|^2 dx + \varepsilon\|n_x^\varepsilon\|^2_{L^2(]1,+\infty[)} + \frac{1}{2}|n^\varepsilon(1,t)|^2 = n^\varepsilon(1,t)\int_1^\infty B(x)n^\varepsilon(x,t)dx. \tag{6.32}$$

Donc en intégrant sur [0,T] on aura

$$\|n^\varepsilon\|^2_{L^2([1,+\infty[)} + \varepsilon\int_0^T \|n_x^\varepsilon\|^2_{L^2([1,+\infty[)} dt + \frac{1}{2}\int_0^T |n^\varepsilon(1,t)|^2 dt$$

$$\leq \int_0^T |n^\varepsilon(1,t)| \int_1^\infty B(x)|n^\varepsilon(x,t)| dx dt.$$

0r, $B \in L^1 \cap L^\infty(]1,\infty[) \subset L^p(]1,\infty[), \forall p \geq 1$. Donc en particulier, $B \in L^2(]1,\infty[)$. Donc, on peut en déduire, en utilisant l'inégalité de **Hölder**, que

$$\int_1^\infty B(x)|n^\varepsilon(x,t)|dx \leq \|B\|_{L^2(]1,\infty[)}\|n^\varepsilon(x,t)\|_{L^2(]1,\infty[)}.$$

En utilisant l'inégalité de **Young** suivante pour $p=2$

$$ab \leq \delta a^p + C_\delta b^{\frac{p}{p-1}} \text{ avec } C_\delta = \delta^{-\frac{1}{p-1}}$$

on obtient donc,

$$|n^\varepsilon(1,t)|\|B\|_{L^2(]1,\infty[)}\|n^\varepsilon(x,t)\|_{L^2(]1,\infty[)} \leq \delta|n^\varepsilon(1,t)|^2 + C_\delta\|B\|^2_{L^2(]1,\infty[)}\|n^\varepsilon(x,t)\|^2_{L^2(]1,\infty[)} \tag{6.33}$$

En injectant (6.33) dans (6.32), on obtient que

$$\|n^\varepsilon\|^2_{L^2(]1,+\infty[)} + \varepsilon\int_0^T \|n_x^\varepsilon\|^2_{L^2(]1,+\infty[)} dt + (\frac{1}{2}-\delta)\int_0^T |n^\varepsilon(1,t)|^2 dt \leq C_\delta \int_0^T \|B\|^2_{L^2(]1,\infty[)}\|n^\varepsilon(x,t)\|^2_{L^2(]1,\infty[)} dt.$$

Choisissons $\delta = \frac{1}{4}$, on obtient que

$$\|n^\varepsilon\|^2_{L^2(]1,+\infty[)} \leq 4\int_0^T \|B\|^2_{L^2(]1,\infty[)}\|n^\varepsilon(x,t)\|^2_{L^2(]1,\infty[)} dt.$$

Donc, par le lemme du **Gronwall**, on obtient

$$\int_0^T \|n^\varepsilon(t)\|^2_{L^2(]1,+\infty[)} \leq \|n_0^\varepsilon\|^2_{L^2(]1,+\infty[)} e^{4T\|B\|^2_{L^2(]1,\infty[)}}$$

Ce qui montre le lemme.

Par conséquent de ce lemme on a :
$(n^\varepsilon)_\varepsilon$ et bornée dans $L^\infty(0,T,L^2(]1,+\infty[))$, $(\sqrt{\varepsilon}n^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(0,T,H^1(]1,+\infty[))$ et on a aussi $(n^\varepsilon(1,.))_\varepsilon$ est bornée dans $L^2((0,T))$.
$(n^\varepsilon)_\varepsilon$ est donc bornée dans $L^\infty(0,T,L^2(]1,+\infty[)) \subset L^2(]0,T[\times]1,+\infty[)$ donc on peut en extraire une sous-famille qu'on continue de noter $(n^\varepsilon)_\varepsilon$ qui converge faiblement dans $L^2(]0,T[\times]1,+\infty[)$.
Et par conséquent, il existe un $n \in L^2(]0,T[\times]1,+\infty[)$ tel que

$$n^\varepsilon \to n \text{ dans } D'(]0,T[\times]1,+\infty[)$$

Soit $\phi \in D(]0,T[\times]1,+\infty[)$.

$$< n_t^\varepsilon, \phi >_{D'D} = \varepsilon < n_{xx}^\varepsilon, \phi >_{D'D} + < n_x^\varepsilon, \phi >_{D'D}$$

ce qui équivalent à dire que

$$- < n^\varepsilon, \phi_t >_{D'D} = \sqrt{\varepsilon} < \sqrt{\varepsilon}n^\varepsilon, \phi_{xx} >_{D'D} - < n^\varepsilon, \phi_x >_{D'D} .$$

Or on sait que $(\sqrt{\varepsilon}n^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(]0,T[\times]1,+\infty[)$, donc en passant à la limite quand ε tend vers 0, on obtient

$$\varepsilon n^\varepsilon \to 0 \text{ dans } D'(]0,T[\times]1,+\infty[),$$

et par conséquent le problème limite sera,

$$n_t = -n_x \text{ dans } D'(]0,T[\times]1,+\infty[).$$

Il reste à vérifier les conditions initiales et aux limites. Pour celà, on va démontrer le lemme suivant :

Lemme 6.6 *Sous les hypothèses du lemme précédent et si de plus, $n_0^\varepsilon \in D((A^\varepsilon)^2)$, la famille $v^\varepsilon = n^\varepsilon - \varepsilon n_x^\varepsilon$ est bornée dans $H^1(]0,T[\times]1,+\infty[)$.*

Preuve D'aprés le lemme (6.5), on sait que que $(\varepsilon n_x^\varepsilon)$ est bornée dans $L^2((0,T,H^1(]1,+\infty[))$, comme (n^ε) l'est aussi, on en déduit que (v^ε) est bornée dans $L^2(]0,T[\times]1,+\infty[)$. De plus, si la donnée initiale, n_0^ε est dans le domaine $D((A^\varepsilon)^2)$, on peut montrer que n_t^ε est aussi bornée dans $L^\infty((0,T,L^2(]1,+\infty[))$ (iIl suffit considérer le lemme précédent pour $w := n_t^\varepsilon$ puisque $w(0,.) = A^\varepsilon n_0^\varepsilon$ qu'on a supposé être dans le domaine de A^ε).
Comme $v_x^\varepsilon = n_t^\varepsilon$ donc (v_x^ε) est bornée dans $L^2(]0,T[\times]1,+\infty[)$.
De plus on a $v_t^\varepsilon = n_t^\varepsilon - \varepsilon n_{tx}^\varepsilon$. Elle est donc aussi bornée dans $L^2(]0,T[\times]1,+\infty[)$ puisque, d'après le lemme (6.5), $(\varepsilon n_{tx}^\varepsilon)$ est bornée dans $L^2(]0,T[\times]1,+\infty[)$.
Par conséquent, (v^ε) est bornée dans $H^1(]0,T[\times]1,+\infty[)$.
D'après ce lemme on peut déduire que si on note χ l'application trace définie de $H^1(]0,T[\times]1,+\infty[)$ dans $L^2(\partial((]0,T[\times]1,+\infty[))$, on obtient

$$\begin{cases} v^\varepsilon \rightharpoonup v & \text{dans } H^1(]0,T[\times]1,+\infty[) \\ \chi(v^\varepsilon) \to \chi(v) & \text{dans } L^2(\partial((]0,T[\times]1,+\infty[)) \end{cases}$$

Mais $(\sqrt{\varepsilon}n^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(]0,T[\times]1,+\infty[)$ et (v^ε) converge faiblement vers v dans $L^2(]0,T[\times]1,+\infty[)$, $(\varepsilon n_x^\varepsilon - n^\varepsilon)$ converge vers n dans $L^2(]0,T[\times]1,+\infty[)$.

- Convergence de la condition aux limites
  On a prouvé que $v^\varepsilon(t,1)$ converge vers $n(t,1)$ dans $L^2(0,T)$ faible. Par ailleurs :
  $$v^\varepsilon(t,1) = \int_1^\infty B(y)n^\varepsilon(t,y)dy.$$
  Mais pour tout $t \in (0,T]$, $n^\varepsilon(t,.)$ converge faiblement dans $L^2(]1,\infty[)$ vers $n(t,.)$. Donc, pour tout $t \in (0,T)$, $\int_1^\infty B(y)n^\varepsilon(t,y)dy$ converge vers $\int_1^\infty B(y)n(t,y)dy$. Comme (n^ε) est bornée dans $L^\infty((0,T]\times]1,\infty[)$ et B est dans $L^1(]1,\infty[)$, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit que $\int_1^\infty B(y)n^\varepsilon(t,y)dy$ converge dans $L^2(0,T)$ vers $\int_1^\infty B(y)n(t,y)dy$. D'où
  $$n(t,1) = \int_1^\infty B(y)n(t,y)dy.$$
- Convergence de la condition initiale
  On a montré que $v^\varepsilon(0)$ converge dans $L^2(]1,\infty[)$ faible vers $n(0)$. Par ailleurs $v^\varepsilon(0,.) = \varepsilon n^\varepsilon_{0x} - n^\varepsilon_0$ et donc des hypoyhèses sur la condition initiale n^ε_0, on déduit que $v^\varepsilon(0)$ converge dans $L^2(]1,\infty[)$ vers n_0. Par unicité de la limite, on obtient que $n(0,.) = n_0(.)$

On conclut ainsi la démonstration du théorème 2.15.

Références

[1] K. J. Engel and R. Nagel, One parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Springer, 2000.

[2] A. Pazy, Semigroups of linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied mathematical sciences Springer-Verlag, 1983.

[3] B. Perthame, Transport Equations in Biology, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser, 2007.

[4] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson 1983.

[5] D. Serre, Système De lois De Conservations I, Hyperbolicité, Entropies, Ondes De Choc, Diderot Editeur Arts Et sciences, 1996.

[6] D. Barbolosi, A. Benabdallah , F. Hubert, F. Verga, *Mathematical and numerical analysis for a model of growing metastatic tumors, [HAL] hal-00262335.*

[7] K. Iwata, K. Kawasaki and N. Shigesada, *A dynamical Model for the Growth and Size Distribution of Multiple Metastatic Tumors,* in J. Theor. Biol., 203, 177-186, 2000.